Theoretische Physik III – Elektrodynamik/Optik

Prof. W. Vogel, J. Sperling, P. Grünwald, R. Schmidt

Info: Fouriertransformation
WS 2013/2014, Uni Rostock

Die Fouriertransformation

Aufgabe der Fouriertransformation ist die Entwicklung von Funktionen durch trigonometrische Funktionen: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \cos(kx) + \mathrm{i}\,\sin(kx)$. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ bildet eine Funktion f auf $\tilde{f}$ ab,

$$\tilde{f}(k) = (\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x).$$

Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ ist gegeben durch (siehe Übungsaufgabe):

$$f(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\tilde{f}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k).$$

Eigenschaften der Fouriertransformation

Zunächst ein paar elementare Eigenschaften:

$$\mathcal{F}[\lambda f(x) + \kappa g(x)](k) = \lambda \tilde{f}(k) + \kappa \tilde{g}(k) \quad (\lambda, \kappa \in \mathbb{C}) \qquad \text{(Linearität)}$$
$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} \tilde{f}(k) \qquad \text{(Translation)}$$
$$\mathcal{F}[f(ax)](k) = \frac{1}{a} \tilde{f}(k/a) \quad (a > 0). \qquad \text{(Skalierung)}$$

Ist nun $\overline{f}$ die komplex konjugierte Funktion zu f, dann gilt

$$\mathcal{F}(\overline{f})(k) = \overline{\tilde{f}(-k)}. \qquad \text{(Komplexe Konjugation)}$$

Zum lösen von partiellen Differentialgleichungen sind folgende Ableitungseigenschaften von Bedeutung:

$$\mathcal{F}(xf) = \mathrm{i}\partial_k \tilde{f} \qquad \text{(Momente)}$$
$$\mathcal{F}(\partial_x f) = \mathrm{i}k\tilde{f} \qquad \text{(Ableitungen)}$$

Betrachtet man folgende Produkte von Funktionen g und f

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x - y) g(y), \qquad \text{(Faltung)}$$
$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \overline{f(x)} g(x), \qquad \text{(Skalarprodukt)}$$

erhält man für die Fouriertransformierten:

$$\langle f, g \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle, \qquad \text{(Parseval'sche Gleichung)}$$
$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\tilde{f} * \tilde{g}). \qquad \text{(Produkt)}$$
$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}\tilde{g}. \qquad \text{(Faltung)}$$

Beispiele

1. δ-Distribution: $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2. Gauß-Kurve: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}}$

3. Kasten ($f(x) = 1$ für $-1 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| > 1$):
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} 1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(k)}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{sinc}(k)$

4. Lorenzkurve: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-|k|}$

Fouriertransformation im $\mathbb{R}^4_{\text{Minkowski}}$

Die raumzeitliche Fouriertransformation von Feldern ist

$$\tilde{\vec{v}}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\vec{v}(\vec{x},t).$$

Damit ergeben sich Differentialoperatoren als

$$\nabla \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \mathrm{i}\vec{k} \quad \text{und} \quad \partial_t \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} -\mathrm{i}\omega.$$

Der Fundamentalsatz der Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$ kann im Fourierraum als geometrische Zerlegung von $\tilde{\vec{v}}(\vec{k})$ in einen Anteil parallel zu $\vec{k}$ und einen Anteil orthogonal zu $\vec{k}$ verstanden werden:

$$\tilde{\vec{v}}(\vec{k}) = \vec{k}\left[\mathrm{i}\tilde{\Phi}(\vec{k})\right] + \vec{k}\times\left[\mathrm{i}\tilde{\vec{A}}(\vec{k})\right] \quad \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\mapsto} \quad \vec{v}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\,\Phi(\vec{r}) + \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}),$$

was den Beweis des Fundamentalsatzes stark vereinfacht. Die Maxwellschen Gleichungen im Fourierraum lauten:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) &= \frac{\tilde{\rho}(\vec{k},\omega)}{\varepsilon_0} & \mathrm{i}\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) &= \mathrm{i}\omega\tilde{\vec{B}}(\vec{k},\omega) \\ \mathrm{i}\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}}(\vec{k},\omega) &= 0 & \mathrm{i}\vec{k}\times\tilde{\vec{B}}(\vec{k},\omega) &= \mu_0\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega) - \mathrm{i}\mu_0\varepsilon_0\omega\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega). \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, dass die 2. und 3. Gleichung identische geometrische Interpretationen bezüglich der Ausrichtung von $\vec{k}$ und $\tilde{\vec{B}}$ liefern. Die Kontinuitätsgleichung ist nun: $0 = -\mathrm{i}\omega\tilde{\rho} + \mathrm{i}\vec{k}\cdot\tilde{\vec{j}}$. Weiterhin erhält man die Fouriertransformierten der Lösungen:

$$\tilde{\vec{E}} = \frac{\mu_0\left[-\mathrm{i}\omega\tilde{\vec{j}}\right] + \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\mathrm{i}\vec{k}\tilde{\rho}\right]}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 - |\vec{k}|^2} \quad \text{und} \quad \tilde{\vec{B}} = \frac{-\mu_0\left[\mathrm{i}\vec{k}\times\tilde{\vec{j}}\right]}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 - |\vec{k}|^2}.$$

Daher wird es eine wesentliche Aufgabe zur Lösung der Wellengleichung sein, die inverse Fouriertransformation der Funktion $[\mu_0\varepsilon_0\omega^2 - |\vec{k}|^2]^{-1}$ zu bestimmen. Als letzter Punkt seien noch die Potentiale und Eichtransformationen ($\tilde{\chi}$) erwähnt:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{B}} &= \mathrm{i}\vec{k}\times\tilde{\vec{A}} & \tilde{\vec{E}} &= -\mathrm{i}\vec{k}\tilde{\Phi} - \mathrm{i}\omega\tilde{\vec{A}} \\ \tilde{\vec{A}}' &= \tilde{\vec{A}} + \mathrm{i}\vec{k}\tilde{\chi} & \tilde{\Phi}' &= \tilde{\Phi} - \mathrm{i}\omega\tilde{\chi}. \end{aligned}$$