Quanten

Hilberträume Sommersemester 2010

Definition und Beispiele

Definition

- Vektorraum $\mathcal{H}$ über Körper $\mathbb{K}$
- mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$
  - (i) $\langle\chi|\lambda\psi + \kappa\phi\rangle = \lambda\langle\chi|\psi\rangle + \kappa\langle\chi|\phi\rangle$ $(\lambda, \kappa \in \mathbb{K}; \chi, \psi, \phi \in \mathcal{H})$
  - (ii) $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$
  - (iii) $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$; $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$
- bezüglich Skalarprodukt vollständig

Die euklidische Norm $\|\cdot\|$ ist gegeben durch $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

Beispiele

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: n-dimensionaler, komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \psi_k^* \phi_n,$$

  mit der orthonormalen Standardbasis $e_k = (\delta_{k,l})_{l=1}^n$. Die Komponentendarstellung eines Vektors v ist

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k|v\rangle e_k.$$

- $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Hilbertraum der 2π-periodischen, komplexwertigen, quadratisch-integrierbaren Funktionen mit Skalarprodukt

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_0^{2\pi} dx\, \psi(x)^* \phi(x).$$

  Eine Orthonormalbasis ist $e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Die Komponentendarstellung ist die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} dx'\, e^{-ikx'} f(x') \right) e^{ikx}.$$

Eine zweite "Basis" ist $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ (2π-periodische δ-Distribution) mit den Werten $0 \leq x_0 < 2\pi$ Es gilt

$$f(x) = \int_0^{2\pi} dx_0 \, \delta(x - x_0) f(x_0),$$

$$\langle \delta_{x_0} | \delta_{x_1} \rangle = \int_0^{2\pi} dx \, \delta(x - x_0) \delta(x - x_1) = \delta(x_0 - x_1).$$

Der "Basiswechsel" erfolgt über die diskrete Fouriertransformation,

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x - x_0)} \text{ und } e^{ikx} = \int_0^{2\pi} dx_0 \, \delta(x - x_0) e^{ikx_0}.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Es gilt $0 \leq \langle \psi + \lambda\phi | \psi + \lambda\phi \rangle$. Mit $\lambda = -\frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}$ erhält man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 \leq \|\psi\|^2 \|\phi\|^2.$$

Die Gleichheit wird genau dann angenommen, wenn $\phi = \kappa\psi$ ($\kappa \in \mathbb{K}$) ist.

Operatoren

Eine lineare Abbildung $\hat{L} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt Operator. Der zu einem Operator $\hat{L}$ adjungierte Operator $\hat{L}^\dagger$ ist definiert als

$$\langle \hat{L}^\dagger \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{L} \phi \rangle \quad (\forall \psi, \phi \in \mathcal{H}).$$

Gilt für eine Abbildung $\hat{L} = \hat{L}^\dagger$, so nennen wir diese selbstadjungiert.

Mit Operatoren kann ein Eigenwertproblem formuliert werden: $\hat{L}\psi = \lambda\psi$. Die Menge der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ nennt man Spektrum.

Beispiele

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$: Die Operatoren sind die $n \times n$-Matrizen $\hat{L} = (L_{i,j})_{i,j=1}^n$, die wie folgt auf einen Vektor $\psi = (\psi_j)_{j=1}^n$ wirken,

  $$\hat{L}\psi = \left(\sum_{j=1}^n L_{i,j} \psi_j \right)_{i=1}^n$$

  als gewöhnliches Matrix-Vektor-Produkt. Das Matrixprodukt ist (im Allgemeinen) nicht kommutativ: $\hat{K}\hat{L} \neq \hat{L}\hat{K}$, oder $\hat{K}\hat{L} - \hat{L}\hat{K} = [\hat{K}, \hat{L}] \neq 0$. Der zu $\hat{L}$ adjungierte Operator ist $\hat{L}^\dagger = (L_{j,i}^*)_{i,j=1}^n$(Transposition und komplexe

Konjugation). Ein Operator ist selbstadjungiert, wenn $L_{i,j} = L^*_{j,i}$. Die Eigenwertzerlegung von $\hat{L}$ liefert das Spektrum, zum Beispiel

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$: Operatoren sind zum Beispiel $\hat{X}$ und $\hat{D}_X$. Sie wirken auf eine Funktion $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ikx}$ als

$$\begin{aligned} \left(\hat{X} f\right)(x) &= x f(x) \\ \left(\hat{D}_X f\right)(x) &= \partial_x f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik f_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

Sie kommutieren nicht, da

$$[\hat{D}_X, \hat{X}] f(x) = \partial_x (x f(x)) - x \partial_x f(x) = f(x).$$

$\hat{X}$ ist selbstadjungiert, aber nicht $\hat{D}_X$. Das Eigenwertproblem kann wie folgt "gelöst" werden:

$$\begin{aligned} x\delta(x - x_0) &= x_0 \delta(x - x_0) \\ \partial_x \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} &= ik \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

$\hat{X}$ hat ein kontinuierliches und beschränktes Spektrum ($0 \leq x_0 < 2\pi$) und $\hat{D}_X$ hat ein diskretes und unbeschränktes Spektrum ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$).

Dualraum

Als Dualraum bezeichnet man den Raum der linear und stetigen Abbildungen $\hat{C}_\chi$ von $\mathcal{H}$ auf $\mathbb{K}$. Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so ist der Dualraum "gleich" dem Hilbertraum $\mathcal{H}^*$:

$$\hat{C}_\chi \psi = \langle \chi | \psi \rangle \in \mathbb{K} \text{ oder } \hat{C}_\chi \cdot = \langle \chi | \cdot \rangle.$$

Damit ist das Skalarprodukt $\hat{C}_\psi \phi = \langle \psi | \phi \rangle$.

Hilbertraumnotation von P. A. M. Dirac

Die Vektoren des Hilbertraumes werden mit $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (Ket-Vektor) bezeichnet. Die Vektoren des Dualraumes werden mit $\langle \phi| \in \mathcal{H}^*$ (Bra-Vektor) bezeichnet. Damit folgt das Skalarprodukt als $\langle\phi|\psi\rangle$ (BraKet-Notation). Ein selbstadjungierter Operator $\hat{L}$ mit diskreten Spektrum wird folgendermaßen Spektral zerlegt:

$$\hat{L} = \sum_k \lambda_k \left|\psi_k\right\rangle \left\langle\psi_k\right|, \text{ mit } \langle\psi_k|\psi_l\rangle = \delta_{k,l}.$$

Dabei sind λ_k die Eigenwerte und $|\psi_k\rangle$ die orthonormalen Eigenvektoren. Die Notation $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ bezeichnet das dyadische Produkt $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}^*$.

Beispiele

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$: Der zum Vektor $|x\rangle = (x_k)_{k=1}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ duale Vektor ist $\langle x| = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ (Transposition und komplex Konjugation). Das Skalarprodukt ist $\langle x|x\rangle = \sum\limits_{k=1}^n x_k^* x_k$. Das Dyadische Produkt ist

$$|x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} x_1 x_1^* & \ldots & x_1 x_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1^* & \ldots & x_n x_n^* \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$: Die Basiselemente bezeichnen wir mit $|k\rangle = \left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{x\in[0,2\pi[}$ mit $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ und $\langle k|l\rangle = \delta_{k,l}$. Die Basiselemente der 2π-periodischen δ-Distribution mit $|x_0\rangle = (\delta(x-x_0))_{x\in[0,2\pi[}$ für $x_0 \in [0, 2\pi[$ und $\langle x_0|x_1\rangle = \delta(x_0 - x_1)$. Die Operatoren $\hat{D}_X$ und $\hat{X}$ haben folgende Spektralzerlegung:

$$\hat{D}_X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik \left|k\right\rangle\left\langle k\right| \text{ und } \hat{X} = \int_0^{2\pi} x_0 \, dx_0 \left|x_0\right\rangle\left\langle x_0\right|.$$

  Die Vollständigkeitsrelation (Darstellung der "Einheitsmatrix") ist

$$\hat{1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|k\right\rangle\left\langle k\right| = \int_0^{2\pi} dx_0 \left|x_0\right\rangle\left\langle x_0\right|.$$

  Die "Impulsdarstellung" und die Ortsdarstellung sind dann

$$\hat{1}|k\rangle = \int_0^{2\pi} dx_0 \left|x_0\right\rangle \underbrace{\langle x_0|k\rangle}_{=\frac{e^{ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}} \quad \text{und} \quad \hat{1}|x_0\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|k\right\rangle \underbrace{\langle k|x_0\rangle}_{=\frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}}.$$